Correction du DS 1

Julien Reichert

Exercice 1

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & & A & C & D & C \\
\times & & & & 1 & 9 & 7 & 9 \\
\hline
 & & & 6 & 1^{\cancel{7}} & 3^{\cancel{7}} & B^{\cancel{6}} & C \\
 & & 4 & B^{\cancel{5}} & A^{\cancel{6}} & 0^{\cancel{5}} & 4 & 0 \\
 & 6 & 1 & 3 & B & C & 0 & 0 \\
 & A & C & D & C & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 1^{\cancel{1}} & 3^{\cancel{2}} & 3^{\cancel{2}} & 2^{\cancel{1}} & F & F & C
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & & H & 2 & G & 2 \\
\times & & & & 1 & 9 & 7 & 8 \\
\hline
 & & & 7 & B^{\cancel{1}} & 5^{\cancel{7}} & 2 & G \\
 & & 6 & C^{\cancel{1}} & 2^{\cancel{6}} & 4 & E & 0 \\
 & 8 & A^{\cancel{1}} & 8^{\cancel{8}} & 1^{\cancel{1}} & 0 & 0 & 0 \\
 & H & 2 & G & 2 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 8^{\cancel{1}} & 2^{\cancel{2}} & 7 & G & 9 & G & G
\end{array}
$$

Exercice 2

$$
\begin{array}{ccc|c}
4 & 5 & 6 & 5 \\
\cline{4-4}
 & 3 & 6 & 65 \\
 & & \mathbf{2} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc|c}
6 & 5 & 5 \\
\cline{3-3}
1 & 5 & 12 \\
 & \mathbf{2} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc|c}
1 & 2 & 5 \\
\cline{3-3}
 & \mathbf{4} & \mathbf{1}
\end{array}
$$

D'où $\overline{456}^7 = \overline{1422}^5$.

$$
\begin{array}{cccc|c}
1 & 3 & 2 & 4 & 7 \\
\cline{5-5}
 & 1 & 2 & & 110 \\
 & & 0 & 4 & \\
 & & & \mathbf{4} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & 0 & 7 \\
\cline{4-4}
 & & \mathbf{2} & \mathbf{4}
\end{array}
$$

D'où $\overline{1324}^5 = \overline{424}^7$.

Exercice 3

Pour rappel, l'écriture en virgule flottante sur 16 bits utilise un bit de signe, puis 5 bits d'exposant et finalement 10 bits de mantisse.

Pour s'épargner des chiffres inutiles, on tronque l'écriture décimale de $\sqrt{2}$ à $1,4142135623$. La partie entière est $\overline{1}^2$, on cherche la partie fractionnaire en binaire par multiplications par deux successives des chiffres significatifs retenus.

On s'autorise l'abus d'écrire une égalité alors que d'une ligne à l'autre on efface le dernier chiffre dont on sait qu'il n'a plus d'influence sur le résultat (une retenue dans la multiplication par 2 ne peut plus rien modifier d'important).

$$\begin{array}{lrcll}
2\times & 0,4142135623 & = & \mathbf{0} & ,828427124 \\
2\times & 0,828427124 & = & \mathbf{1} & ,65685424 \\
2\times & 0,65685424 & = & \mathbf{1} & ,3137084 \\
2\times & 0,3137084 & = & \mathbf{0} & ,627416 \\
2\times & 0,627416 & = & \mathbf{1} & ,25483 \\
2\times & 0,25483 & = & \mathbf{0} & ,5096 \\
2\times & 0,5096 & = & \mathbf{1} & ,019
\end{array}$$

À ce stade, on remarque qu'il faudrait multiplier par 64 pour enfin dépasser 1, ce qui donne cinq zéros de plus en binaire, soit bien suffisamment pour remplir la mantisse.

L'exposant est 0, ce qui se voit au niveau de la partie entière. Il se représente sur 5 bits comme $0 + 2^{5-1} - 1$, soit $\overline{01111}^2$. La mantisse commence par le premier 0 de la partie entière (pas le 1 de la partie entière, qui est implicite), elle est donc de $\overline{0110101000}$.

La représentation finale est alors 0 01111 0110101000.

De même, on tronque l'écriture décimale de e à $2,71828182845$. La partie entière est $\overline{10}^2$.

$$\begin{array}{lrcll}
2\times & 0,71828182845 & = & \mathbf{1} & ,4365636569 \\
2\times & 0,4365636569 & = & \mathbf{0} & ,873127313 \\
2\times & 0,873127313 & = & \mathbf{1} & ,74625462 \\
2\times & 0,74625462 & = & \mathbf{1} & ,4925092 \\
2\times & 0,4925092 & = & \mathbf{0} & ,985018
\end{array}$$

À ce stade, on remarque que l'écart à 1 est inférieur à $\frac{1}{32}$, ce qui donne cinq uns de plus en binaire, soit bien suffisamment pour remplir la mantisse.

L'exposant est 1, ce qui se voit au niveau de la partie entière. Il se représente sur 5 bits comme $1 + 2^{5-1} - 1$, soit $\overline{10000}^2$. La mantisse commence par le 0 de la partie entière (pas le 1, qui est implicite), elle est donc de $\overline{0101101111}$.

La représentation finale est alors 0 10000 0101101111.

Exercice 4

Le plus petit nombre strictement positif représentable en virgule flottante (hors valeurs exceptionnelles) sur 16 bits s'écrit 0 00001 $0\ldots0$ et correspond à 2^{-14}, le plus grand nombre s'écrit 0 11110 $1\ldots1$ et correspond à $2^{15} \times (1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \cdots + 2^{-10}) = 2^{15} \times (2 - 2^{-10})$. Le produit des deux fait donc $2 \times (2 - 2^{-10}) = 4 - 2^{-9}$.